## 基础课47 双曲线

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 已知等轴双曲线的焦距为12，则的实轴长为（ B ）.

A. B. C. D. 6

[解析]因为，所以.因为，所以，所以，故双曲线 的实轴长为.故选.

2. “”是“为双曲线”的（ C ）.

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]因为方程 表示双曲线，所以，

又当 时，方程 表示双曲线，

所以“”是“方程 为双曲线”的充要条件.故选.

3. 已知双曲线的上、下焦点分别为，，是双曲线上一点，且满足，则双曲线的标准方程为（ D ）.

A. B. C. D.

[解析]依题意得，,解得，

所以，因为双曲线的焦点在 轴上，所以双曲线的标准方程为.故选.

4. 已知双曲线的渐近线方程为，则双曲线的离心率为（ D ）.

A. B. C. D. 或

[解析]当双曲线的方程为 时，，则离心率；

当双曲线的方程为 时，，则离心率.

综上所述，双曲线的离心率为 或.故选.

5. 已知双曲线的两个焦点分别为，，为双曲线右支上一点.若，则的面积为（ B ）.

A. 23 B. 24 C. 25 D. 26

[解析]由双曲线的定义可得，

解得，故.

因为，则,所以 为直角三角形，

因此.故选.

6. 若等轴双曲线的焦距为4，则的一个焦点到一条渐近线的距离为（ B ）.

A. 1 B. C. 2 D.

[解析]由题意可知，双曲线 的方程为，

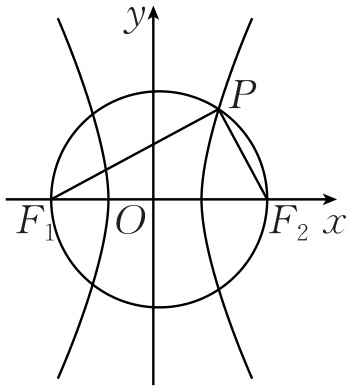
渐近线的方程为.

又，则，，则 的一个焦点到一条渐近线的距离.故选.

7. 已知双曲线的左、右焦点分别为，，记，以坐标原点为圆心，为半径的圆与双曲线在第一象限的交点为.若，则双曲线的离心率为（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]如图，由题意可得，，.



因为点 在第一象限，，

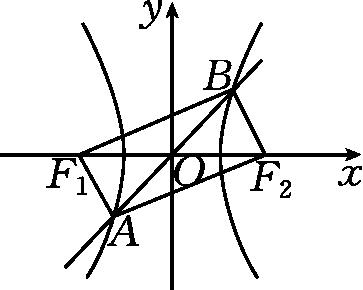
且，所以.

在 中，由勾股定理可得，即，整理可得，解得 或（舍去）,所以.故选.

8*.*(2024·九省适应性测试)设双曲线*C*:*-=*1(*a>*0,*b>*0)的左、右焦点分别为*F*1,*F*2,过坐标原点的直线与*C*的左、右支分别交于*A*,*B*两点,*|F*1*B|=*2*|F*1*A|*,·*=*4*a*2,则*C*的离心率为(D)*.*

A*.* B*.*2 C*.* D*.*

[解析]



如图,设双曲线的半焦距长为*c*,离心率为*e*,由双曲线的对称性可知*|F*1*A|=|F*2*B|*,*|F*1*B|=|F*2*A|*,则四边形*AF*1*BF*2为平行四边形,

令*|F*1*A|=|F*2*B|=m*,则*|F*1*B|=|F*2*A|=*2*m*,

由双曲线的定义可知*|F*2*A|-|F*1*A|=*2*a*,故2*m-m=*2*a*,即*m=*2*a*,

即*|F*1*A|=|F*2*B|=m=*2*a*,*|F*1*B|=|F*2*A|=*4*a*,

·*=||*·*||*cos∠*AF*2*B=*4*a*·2*a*cos∠*AF*2*B=*4*a*2,

则cos∠*AF*2*B=*,即∠*AF*2*B=*,故∠*F*2*BF*1*=*,

则cos∠*F*2*BF*1*===-*,

即*=-*,即*-=-*,则*e*2*=*7,由*e>*1,得*e=.*

故选D*.*

#### 综合提升练

9. （多选题）已知双曲线经过点，则（ BC ）.

A. 的实轴长为2 B. 的焦距为

C. 的离心率为 D. 的渐近线方程是

[解析]由题意得，解得，即双曲线 的方程为,所以双曲线 的实轴长为4，焦距为，离心率为，渐近线的方程是.故，正确，，错误.故选.

10. （多选题）已知,是椭圆和双曲线的公共焦点，椭圆的离心率为,双曲线的离心率为,是他们的一个公共点，且，则以下结论正确的是（ BD ）.

A. B.

C. D. 的最小值为

[解析]由题意可得，故 错误；

不妨设 是第一象限的点，，，

由椭圆和双曲线的定义可得，，

解得，，

因为，

在 中，由余弦定理可得，

化简为，所以，故 正确；

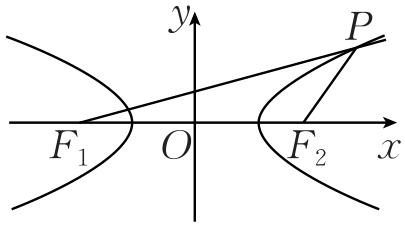
由，可得，则，即，故 错误；

由，当且仅当,即 时，等号成立，即 的最小值为，故 正确.故选.

11. [2024·湖北模拟]（双空题）已知是双曲线上一点，，分别是双曲线的左、右焦点，的周长为，则  ，的面积为  .

[解析]在双曲线 中，，，则，

根据对称性，不妨设点 在双曲线 的右支上，如图，则.



因为，的周长为，所以，

所以，.

在 中，，

则，

所以.

12. 已知，是双曲线的两个焦点，双曲线的离心率为5，点在上，若，则的取值范围是,,.

[解析]设双曲线 的焦距为，离心率为.

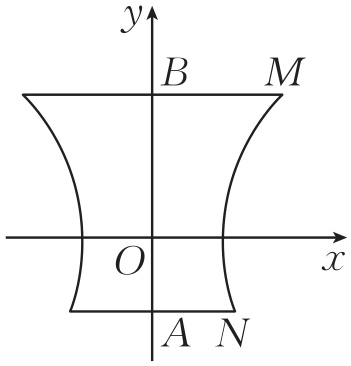
当 时，由平面几何知识得，解得.

，.

根据双曲线 上点的横坐标的取值范围以及平面向量内积的几何意义可知，当 时，的取值范围是,,.

#### 应用情境练

13. 如图，某水杯的主体部分可以近似看作是离心率为的双曲线的右支与轴及平行于轴的两条直线围成的曲边四边形绕轴旋转一周得到的几何体，若为双曲线右支上的一点，为的左焦点，则与点到的一条渐近线的距离之和的最小值为4.



[解析]由题意可知,，则，,

所以，

故双曲线 的方程为，一条渐近线方程为，

设双曲线 的右焦点为,则焦点 到渐近线 的距离，

所以 与点 到双曲线 的一条渐近线的距离之和的最小值为2，

又，所以 与点 到双曲线 的一条渐近线的距离之和的最小值为.

14. 已知双曲线的焦距为，直线过点和，且点到直线的距离与点到直线的距离之和，则双曲线离心率的取值范围为,.

[解析]设直线 的方程为，即.

由点到直线的距离公式，且，得点 到直线 的距离，点 到直线 的距离，

所以.

由，得，即，

因为，所以，所以，

即，所以，所以，

即 的取值范围为,.

#### 创新拓展练

15. （改编）已知椭圆和双曲线有相同的焦点（在轴上），，它们的离心率分别为，，若为它们的一个交点，且，则当取得最小值时，双曲线的渐近线方程为  .

[解析]设椭圆的长半轴长为，双曲线的实半轴长为，虚半轴长为,椭圆与双曲线的焦距为，则由,可得，

，，

， ①

. ②

将①②两式相加得，即，

，当且仅当，即,时取等号.由，可得，

双曲线的渐近线方程为.

16. 已知双曲线的左顶点为，右焦点为，动点在双曲线上.当时，.

（1）求双曲线的方程.

（2）设为双曲线上一点，点，在双曲线的渐近线上，且分别位于第一、四象限，若恰为线段的中点，试判断为坐标原点的面积是否为定值.若为定值，请求出这个定值；若不为定值，请说明理由.

[解析]（1）由题意，得，当 时,,，

则由，可得，

，即，

又，（负值舍去），，

解得，

双曲线 的方程为.

（2）由（1）可知双曲线 的渐近线方程为.

设，，其中，.

为线段 的中点，,，

将点 的坐标代入双曲线 的方程得，解得.

设 ，则.

又，，，

，，

.

又，，

，

的面积为定值2.